

文章编号: 1007-4619 (2003) 02-0093-05

复杂地貌形态多比例尺表达的二维小波分析研究

吴纪桃¹, 王 桥²

(1. 北京航空航天大学 理学院应用数学系, 北京 100083; 2. 南京师范大学 地理科学学院, 南京 210097)

摘 要: 针对复杂地貌形态的多比例尺表达中的等高线容易相交、地性特征描述困难和表达过程缺乏自适应等难题, 提出了基于小波理论的复杂地貌形态的多比例尺表达模型, 为上述问题的解决提供了新的思路 and 有效途径。

关键词: 复杂地貌; 多比例尺表达; 小波分析; Lipschitz 指数

中图分类号: TP751.1/TP79 **文献标识码:** A

1 引 言

复杂地貌形态表现在地形图或 GIS 图形中往往是一族密集等高线。对这些等高线进行制图综合或多比例尺表达时, 现有的方法常常会使综合后的等高线产生相交现象, 这是一个十分严重的问题, 会导致地形表示上的逻辑混乱。造成这种现象的原因往往是所用的制图综合方法中没有充分顾及密集等高线之间的相关性。事实上, 当一族密集等高线逐条线进行处理时, 即使所用方法已充分顾及单条线自身的结构特征, 也很难完全避免相交现象的产生(比如基于分形的线状制图综合方法)。本文提出另外一条技术路线, 由一族密集等高线生成描述该地貌形态的数字高程模型(DEM), 对该数字高程模型进行形态综合或多比例尺表达, 生成新的数字高程模型, 再由此数字高程模型还原出相应的等高线图^[1,2]。

2 二维正交小波基和二维小波变换

设在 $L^2(R)$ 中已给定一个多尺度分析 MRA:

$$\{0\} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subset V_0 \subseteq V_{-1} \dots \subseteq L^2(R) \quad (1)$$

及相应的尺度函数 $\phi(x)$ 、小波函数 $\psi(x)$ 。定义 j 尺度下的二维尺度空间 V_j 为

$$V_j = V_i \otimes V_j = \{g(x)f(y) \mid \forall g(x) \in V_j, f(y) \in V_j, j \in Z\} \quad (2)$$

其中符号 \otimes 表示空间相乘, 则由

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n)$$

是 V_j 的标准正交基可知,

$$\{\phi_{j,n}(x) \cdot \phi_{j,m}(y)\}_{n,m \in Z}$$

一定是 V_j 的标准正交基。

令 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补空间, 则 $\tilde{W}_j^1 = W_j \otimes V_j$, $\tilde{W}_j^2 = V_j \otimes W_j$, $\tilde{W}_j^3 = W_j \otimes W_j$ 分别称之为二维小波空间。显然, $\{\psi_{j,n}(x) \cdot \phi_{j,m}(y)\}_{n,m \in Z}$ 是 \tilde{W}_j^1 的标准正交基, $\{\phi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}_{n,m \in Z}$ 是 \tilde{W}_j^2 的标准正交基, $\{\psi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}_{n,m \in Z}$ 是 \tilde{W}_j^3 的标准正交基, 且空间 $V_j, \tilde{W}_j^1, \tilde{W}_j^2, \tilde{W}_j^3$ 两两正交。其中 $\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n)$ 。

$\{V_j\}_{j \in Z}$ 显然满足 MRA 的伸缩规则性、平移不变性和正交基存在性, 由此, 我们得到了二维 $L^2(R^2)$ 空间的一个 MRA: $\{V_j\}_{j \in Z}$ 。而

$$\begin{aligned} & \{\{\psi_{j,n}(x) \phi_{j,m}(y)\} \cup \{\phi_{j,n}(x) \psi_{j,m}(y)\}\} \\ & \cup \{\{\psi_{j,n}(x) \psi_{j,m}(y)\}\}_{j,n,m \in Z} \end{aligned} \quad (3)$$

构成了 $L^2(R^2)$ 中的正交小波基。

同一维信号相似, 由二维的多尺度分析 MRA 也可推导出二维正交小波变换的 Mallet 算法^[3,4]。

设二维信号 $f(x, y)$ 的离散形式 $\{C_{i,l}^0\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$, $l = 0, 1, 2, \dots, 2^n$, 设 $f \in V_0$, 并设

收稿日期: 2001-07-10; 修订日期: 2001-08-28

基金项目: 本文由国家自然科学基金项目(60173001)、武汉大学测绘与遥感国家重点实验室基金项目、南京师范大学特聘教授科研基金资助。

作者简介: 吴纪桃(1957—), 武汉市人, 女, 教授, 博士, 毕业于武汉大学地图制图与地理信息工程专业, 现从事地图信息处理、图形图像处理方面的研究, 已发表论文 20 余篇。

$\{h_k\}, \{g_k\}, k=0, 1, \dots, 2N-1$, 是小波函数的滤波器, 则相应的分解公式为:

$$C_{i,l}^j = \sum_{k=2i}^{2i+2N-1} \sum_{m=2l}^{2l+2N-1} h_{k-2i} h_{m-2l} C_{k,m}^{j-1} \quad (4)$$

$$\alpha_{i,l}^j = \sum_{k=2i}^{2i+2N-1} \sum_{m=2l}^{2l+2N-1} g_{k-2i} h_{m-2l} C_{k,m}^{j-1} \quad (5)$$

$$\beta_{i,l}^j = \sum_{k=2i}^{2i+2N-1} \sum_{m=2l}^{2l+2N-1} h_{k-2i} g_{m-2l} C_{k,m}^{j-1} \quad (6)$$

$$\gamma_{i,l}^j = \sum_{k=2i}^{2i+2N-1} \sum_{m=2l}^{2l+2N-1} g_{k-2i} g_{m-2l} C_{k,m}^{j-1} \quad (7)$$

$$i, l=0, 1, 2, \dots, 2^{n-j}$$

上述 $\{C_{i,l}^j\}$ 是原始信号经过 j 次分解的在 V_j 中的投影, $\{\alpha_{i,l}^j\}, \{\beta_{i,l}^j\}, \{\gamma_{i,l}^j\}$ 是 V_j 在 V_{j-1} 中的细节信息, 它们分别构成 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补 W_j^1, W_j^2, W_j^3 。

由于 $\{h_k\}, \{g_k\}$ 分别具有低通和高通特性, 而 $\alpha_{i,l}^j$ 经过了行方向上的高通, 列方向上的低通, 所以它反映的是水平方面的细节信号、垂直方向的概貌; 相应地, $\beta_{i,l}^j$ 反映的是水平方向的概貌、垂直方向的细节; $\gamma_{i,l}^j$ 反映的是沿对角线方向的细节。

与一维情形类似地, 有下述二维小波的重构公式:

$$\begin{aligned} C_{k,m}^{j-1} &= \sum_{i,l=k-2N+1}^k h_{k-i} h_{m-l} C_{i,l}^{j-2} + \sum_{i,l=k-2N+1}^k g_{k-i} h_{m-l} \alpha_{i,l}^{j-2} \\ &+ \sum_{i,l=k-2N+1}^k h_{k-i} g_{m-l} \beta_{i,l}^{j-2} \\ &+ \sum_{i,l=k-2N+1}^k g_{k-i} g_{m-l} \gamma_{i,l}^{j-2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$k, m = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-j+1}$$

在应用(8)式时, 当 i, l 不是偶数时, 将 $C_{i,l}^{j-2}, \alpha_{i,l}^{j-2}, \beta_{i,l}^{j-2}, \gamma_{i,l}^{j-2}$ 赋值为零。另外, 当 $\frac{i}{2}, \frac{l}{2}$ 为负数时, 也可令 C, α, β, γ 的值为零或其它值(即延拓)。

3 地貌形态复杂度的数学描述

为了更好地建立和分析对复杂地貌的多比例尺表达模型, 先对地貌形态的复杂度进行量化描述。地貌形态可用二元函数 $z=f(x, y)$ 表示, 那么, 与一元函数类似地可用二元函数的 Lipschitz 指数来描述 $f(x, y)$ 的奇异性, 也即描述地貌形态的复杂程度。

定义: 我们称 $f(x, y)$ 的 Lipschitz 指数为 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 若

$$\begin{aligned} &|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= O\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}^\alpha\right) \end{aligned} \quad (9)$$

记为 $f(x, y) \in C^\alpha(R^2)$, 其中符号 O 表示同阶的意思。若(9)式仅在 $x_2=x_0, y_2=y_0$ 处成立, 则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处 Lipschitz 指数为 α , 记为 $f(x, y) \in C^\alpha(x_0, y_0)$ 。

与一般描述地形表面的分数布朗表面所具有的统计性质:

$$\begin{aligned} &\text{Var}(|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|) \\ &= K \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^{2H} \quad (0 < H < 1) \end{aligned} \quad (10)$$

相比, 可知这里的 Lipschitz 指数 α 与 H 具有类似性作用, 而分数布朗表面的 H 可确定它的分维 $D=3-H$, 所以, 在有些文献中, 也称 α 为函数 $f(x, y)$ 的分维(全局), 从 α 的定义或从 H 的含义可得出 α 的粗略含义: 若 α 的值越小, 则 $f(x, y)$ 的形态越陡峭, 即地貌形态越复杂, α 的值越大, 则 $f(x, y)$ 的形态越平缓, 即地貌形态越简单。正因为如此, 对于地貌 $z=f(x, y)$ 来说, 无论是从掌握它的特征这一需要来看, 还是从对它进行多比值尺表达的需要来看, 都需要估计 α 的值。

4 利用小波变换计算 α 值

下面的定理描述了函数 $f(x, y)$ 的二进小波变换与 $f(x, y)$ 的 Lipschitz 指数 α 之间的关系。

定理^[1]: 设 $\psi(t)$ 是小波函数, $\varphi(t)$ 是其尺度函数, $f(x, y)$ 的 Lipschitz 指数为 α , 即 $f(x, y) \in C^\alpha(R^2)$, 则有

$$|\alpha_{m,n}^j| \leq K_1 2^{(\alpha+1)j} \quad (11)$$

$$|\beta_{m,n}^j| \leq K_2 2^{(\alpha+1)j} \quad (12)$$

$$|\gamma_{m,n}^j| \leq K_3 2^{(\alpha+1)j} \quad (13)$$

其中, K_1, K_2, K_3 是不依赖于变换层数 j 的常数, $\alpha_{m,n}^j, \beta_{m,n}^j, \gamma_{m,n}^j$ 是二维小波变换系数。

可以认为, 当 $\alpha_{m,n}^j, \beta_{m,n}^j, \gamma_{m,n}^j$ 取得模极大值时, 式(11), (12), (13)中的等号成立:

$$\max |\alpha_{m,n}^j| = K_1 2^{(\alpha+1)j} \quad (14)$$

$$\max |\beta_{m,n}^j| = K_2 2^{(\alpha+1)j} \quad (15)$$

$$\max |\gamma_{m,n}^j| = K_3 2^{(\alpha+1)j} \quad (16)$$

对上式中(14)两边取对数:

$$\ln \max |\alpha_{m,n}^j| = \ln K_1 + (\alpha + 1)\ln 2^j \quad (17)$$

对点 $(\ln 2^j, \ln \max |\alpha_{m,n}^j|)$, $j=1, 2, \dots, J$ 作线性回归,即直线拟合,可求得直线的斜率 a 和截距 b ,对照式(17),知 $\begin{cases} \alpha_1 = a - 1 \\ K_1 = e^b \end{cases}$ 。对(15)、(16)式可如法操作,求出 α 的另二个近似值 α_2, α_3 ,最后取 $\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ 和 K_1, K_2, K_3 。

值得指出的是,上述估计 α 的方法当函数 $f(x, y)$ 的 Lipschitz 指数不是一致地为 α 时,求出的只是 $f(x, y)$ 的在统计意义下的 Lipschitz 指数。

5 重构中的阈值选取

求出了 α 和 K_1, K_2, K_3 即求得了 $f(x, y)$ 经过了 j 次小波分解后,在 V_j 的正交补空间 $\tilde{W}_j^1, \tilde{W}_j^2, \tilde{W}_j^3$ 中的细节系数 $\alpha_{m,n}^j, \beta_{m,n}^j, \gamma_{m,n}^j$ 的模的上界。用它们可以估计出在各点处用 V_j 去近似 V_{j-1} 时的误差限。

在制图综合或地貌的多比例尺表达中,一般来说,我们并不是让信息量随着比例尺缩小而成 $M_1 : M_2$ (比例尺分母之比)比例地缩小,而是采取一种折衷。因此,在这里,我们采用在 V_j 上叠加一些 $\tilde{W}_j^1, \tilde{W}_j^2, \tilde{W}_j^3$ 中部分信息去近似 V_{j-1} 的办法。直观的想法是,若 $|\alpha_{m,n}^j|, |\beta_{m,n}^j|, |\gamma_{m,n}^j|$ 的值较小就视其为零;若较大则将它们带有的信息加到 V_j 中去,即重构 V_{j-1} 。在此思想指导下,取阈值为:

$$\epsilon_1 = K_1 2^{(\alpha+1)j} \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\epsilon_2 = K_2 2^{(\alpha+1)j} \frac{1}{2} \quad (19)$$

$$\epsilon_3 = K_3 2^{(\alpha+1)j} \frac{1}{2} \quad (20)$$

改变, α, β, γ 的值:

$$\alpha_{m,n}^j = \begin{cases} \alpha_{m,n}^j & |\alpha_{m,n}^j| \geq \epsilon_1 \\ 0 & |\alpha_{m,n}^j| < \epsilon_1 \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta_{m,n}^j = \begin{cases} \beta_{m,n}^j & |\beta_{m,n}^j| \geq \epsilon_2 \\ 0 & |\beta_{m,n}^j| < \epsilon_2 \end{cases} \quad (22)$$

$$\gamma_{m,n}^j = \begin{cases} \gamma_{m,n}^j & |\gamma_{m,n}^j| \geq \epsilon_3 \\ 0 & |\gamma_{m,n}^j| < \epsilon_3 \end{cases} \quad (23)$$

将新赋值的 α, β, γ 代入重构公式(13)中,重构出的信号介于 V_j 与 V_{j-1} 之间,这种结构反映了制图综合的本质思想,即在可视化与信息量之间找到一

种平衡。

6 模型的应用和实验

实验 1:样图(图 1)是四川西北部某山地地貌的等高线图,比例尺 1:2.5 万。经过上述算法步骤 ($J=4$) 后,得到 4 个不同分辨率的 $DEM_1, DEM_2, DEM_3, DEM_4$,再经过转换,得到 4 张不同分辨率的图(图 2,图 3,图 4,图 5),经过适当缩小后即可得出比例尺为 1:5 万,1:10 万,1:20 万,1:40 万的等高线图。这里为了便于对比没有经过光滑、缩小、等高线条数综合等其它处理。



图 1 1:2.5 万等高线图原图
Fig.1 1:25000 contours



图 2 经过 1 次小波变换得到的等高线图
Fig.2 Contours after once Wavelet transform



图 3 经过 2 次小波分解得到的等高线图
Fig. 3 Contours after twice Wavelet transforms

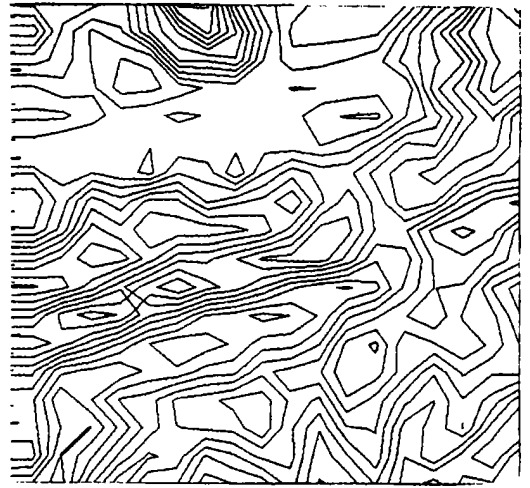


图 5 经过 4 次小波分解得到的等高线图
Fig. 5 Contours after four times Wavelet transforms

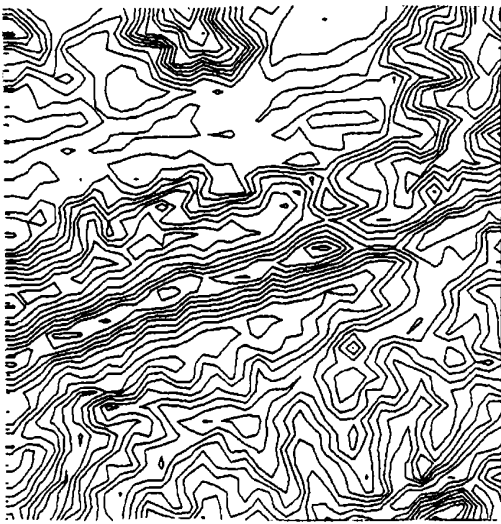


图 4 经过 3 次小波分解得到的等高线图
Fig. 4 Contours after three times Wavelet transforms

7 结 论

对比图 1、图 2、图 3、图 4、图 5, 可得出以下结论:

(1) 相应的尺度范围内山顶、鞍点、谷地交汇点(线)、谷地线、山脊线等地貌特征得到相应地保持, 因而也就保持了地貌整体的切割程度、结构特征。这一点从对 5 张图的全图比较中可得出。

(2) 同张图上等高线之间的协调关系得到较好地保持, 因而也就保持了山体轮廓、山脊、谷地走向等地貌形态的塑造。这一点从观察每张图的右下角、右上角、左上角以及几组相关性非常强的等高线的情况

可得出。可以说, 达到了成组综合等高线的效果。

(3) 系列图之间信息量的变化、曲线简化程度的变化、地貌综合程度的变化稳定、一致, 且符合人的视觉感觉习惯及标准。

(4) 由于模型中阈值计算公式中用到与地貌形态有关的 Lipschitz 指数 α , 因此, 阈值是与地貌的复杂程度(或切割程度)有关, 从公式(18), (19), (20)可看出, α 越小(即地貌越复杂), 阈值 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 就越小, 则 α, β, γ 的各点中去掉的就越少, 也即重构中为保持形态就需叠加上更多的细节信息。所以此模型中的阈值是自适应地取值。

(5) 由于模型的稳定性以及算法中阈值取法的灵活性, 可使地貌数据的多比例尺表达的范围更加宽广。

参 考 文 献 (References)

- [1] Wu J T. Researches on the Multi-scale Representation of Map Data in GIS Based on Wavelet Theory [D]. 2001. [吴纪桃. 基于小波理论的地图图形数据多比例尺表达研究[D]. 武汉大学博士学位论文, 2001.]
- [2] Wu J T, Wang Q. A Study on Automatic Cartographic Generalization Using Wavelet Analysis in GIS. [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2000, **29**(1): 70-75. [吴纪桃, 王桥. 小波分析在 GIS 线状数据图形简化中的应用研究[J]. 测绘学报, 2000, **29**(1): 71-75.]
- [3] Peng Y H. Wavelet Transformation and Its Application in Engineering [M]. Beijing: Science Press, 2000. [彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.]
- [4] Chui C K. An Introduction to Wavelet [M]. New York: Academic Press, 1992.

A Study on the Multi-scale Representations of the Complex Landforms Based on Two-Dimensional Wavelet Transformation

WU Ji-tao¹ WANG Qiao²

(1. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100083; 2. Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: The multi-scale representation model of complex landform based on two-dimensional wavelet transformation is proposed in this paper. The new idea and principle of this model can completely get rid of intersection of different contours which commonly occurred in almost all models used before. Thus, it could be said that by theory and method the model can preserve the veins of landform, maintain the coordinate relations among the contour lines, besides, it has adaptive property. The experiments on that model give the following conclusions:

① The landform characteristics such as the peaks, saddle points, valley lines, intersections of valleys, ridge lines of mountains can be preserved very well, so the structure and roughness of the global landform will be retained.

② The relative positions of the contour lines are maintained precisely, so the shape of the landform such as the outlines of mountains, the directions of ridges and valleys are retained quite well.

③ The rates of changes of the amount of information, the simplification of the contour lines, the extent of landform generalization for different levels of decomposition or reconstruction are consistent and stable, besides, they coincide with the visual feeling and standard of the ordinary people.

④ The Lipschitz index, which is related to the roughness of the landform, is used to calculate the threshold value in the model, thus the threshold which control the amount of information being retained is directly linked with the complexity of the landform and could be adjusted adaptively.

⑤ Because of the flexibility of the threshold value and the stability of the method, the multi-scale representation based on that two dimensional wavelet model is suitable for more kinds of landforms.

Key words: complex landform; multi-scale representation; wavelet analysis; Lipschitz index